

학습지제작소	중학교 1학년 수학 1. 소인수분해 개념정리 1-1. 소수와 합성수	중학교
		1학년 반
		이름

소수와 합성수

중학교를 입학하고 처음 수학책을 펴면, 소수라는 표현이 등장합니다. 아이들은 소수를 배웠기 때문에 자신감을 갖고 교과서를 읽어봅니다. 그런데 소수점이 없다는 것을 알게 되고, 처음으로 당황하죠.

수학에서는 '소수'라는 표현이 두 가지가 있습니다. 소숫점으로 자연수가 아닌 수를 표현하는 소수(decimal)와 오늘 공부할 자연수 중 소수(prime number)입니다.

소수를 알기 위해서는 약수를 구해볼 필요가 있습니다.

모든 자연수는 하나 이상의 약수를 가집니다.

예) 2의 약수: 1,2

예) 9의 약수: 1,3,9

우리는 이 중 약수의 개수가 2개인 수를 소수라고 약속합니다.

2는 약수가 1과 2밖에 없으므로 소수입니다.

소수의 소(素)는 바탕이라는 의미를 가집니다. 소수는 자연수를 구성하는 바탕이라고 볼 수 있습니다. 왜냐하면, 2 이상의 모든 자연수는 소수이거나 소수끼리의 곱으로 나타낼 수 있기 때문입니다.

◎ 세 자연수 110, 27, 17가 소수인지 알아보시오.

[풀이]

§ 110은 1,2,5,10,11,22,55,110을 약수로 갖습니다. 따라서 소수가 아닙니다.

[참고] 110은 2와 5, 11의 곱($2 \times 5 \times 11$)으로 나타낼 수 있는데, 2,5,11은 모두 소수입니다.

§ 27은 1,3,9,27을 약수로 갖습니다. 따라서 소수가 아닙니다.

하지만 3끼리의 곱($3 \times 3 \times 3$)으로 나타낼 수 있는데, 3은 모두 소수입니다.

§ 17은 1,17을 약수로 갖습니다. 따라서 소수입니다.

정답: 110(소수가 아님), 27(소수가 아님), 17(소수)

110과 27과 같이 소수끼리의 곱으로 나타낼 수 있는 수를 합성수라고 부릅니다.

따라서 2이상의 모든 자연수는 소수 또는 합성수로 이루어져 있습니다.

학습지제작소	중학교 1학년 수학 1. 소인수분해 개념정리 1-2. 소인수, 소인수분해	중학교
		1학년 반
		이름

소인수

어떤 자연수의 약수(인수) 중 소수인 약수를 **소인수**라고 부릅니다.

예) 2,3,5,7,11...

35의 약수는 1,5,7,35인데, 그 중 5와 7은 소수입니다.

따라서 35의 소인수는 5와 7입니다.

마찬가지로, 100의 약수는 1,2,4,5,10,20,25,50,100인데, 그 중 2와 5가 소수입니다.

따라서 100의 소인수는 2와 5입니다.

소인수분해

소인수분해는 자연수를 소인수의 곱으로 나타내는 것을 말합니다.

예를 들어, 6의 약수 중 소수인 약수는 2와 3으로

$6 = 2 \times 3$ 으로 나타낼 수 있습니다.

◎ 15, 32, 100을 소인수분해하시오.

[풀이]

$$15 = 3 \times 5$$

$$32 = 2^5$$

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

이때 15의 소인수는 3,5

32의 소인수는 2

100의 소인수는 2,5임을 알 수 있습니다.

◎ 소인수의 합을 구하시오.

(1) 35

(2) 180

[풀이]

(1) 35를 소인수분해하면 $35 = 5 \times 7$

35의 소인수는 5,7입니다.

따라서 35의 소인수의 합은 $5+7=12$ 입니다.

(2) 180을 소인수분해하면 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 입니다.

180의 소인수는 2,3,5입니다.

따라서 180의 소인수의 합은

$2+3+5=10$ 입니다.

정답: (1) 12, (2) 10

학습지제작소	중학교 1학년 수학 1. 소인수분해 개념정리 1-3. 최대공약수	중학교
		1학년 반
		이름

최대공약수

최대공약수란, 두 자연수에 대하여 공통된 약수 중 가장 큰 자연수를 의미합니다.

예) 16과 20의 최대공약수는 16의 약수이면서 20의 약수인 수 중 가장 큰 수입니다.

16의 약수 : 1, 2, 4, 8, 16

20의 약수 : 1, 2, 4, 5, 10, 20

으로, 둘의 공통된 약수는 1, 2, 4입니다.

세 수 중 가장 큰 수는 4이므로, 16과 20의 최대공약수는 4입니다.

우리가 초등학교를 다닐 때 최대공약수는 직접 약수를 적은 후 비교하거나, 두 수를 한꺼번에 나누어 구했습니다.

[참고] 초등학교에서 최대공약수를 구하는 법

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 16 \quad 20} \\
 2 \overline{) 8 \quad 10} \\
 \hline
 4 \quad 5
 \end{array}$$

16과 20이 모두 나누어 떨어지는 수를 찾고, 왼쪽에 나누었던 수(2×2)를 곱하여 최대공약수(4)를 구했었죠.

그런데 어떻게 이 방법으로 구할 수 있을까요?

처음 16과 20 왼쪽에 2를 적었다는 의미는 곧 16과 20이 각각 2로 나누어떨어짐을 의미합니다.

다시 말해, 2는 16과 20의 공약수입니다.

8과 10 왼쪽의 2 역시 8과 10이 2로 나누어떨어진다는 의미이고, 2는 8과 10의 공약수입니다.

4와 5는 서로소이므로, 최대공약수가 1입니다.

정리하자면 16과 20은 2로 두 번 나눈다면 서로소가 됩니다.

4로 나누면 두 수는 서로소가 되고, 최대공약수는 4입니다.

[요약] 두 자연수에 대하여 서로소가 되도록 나눌 수 있다면, 그 수는 최대공약수입니다.

소인수분해로 최대공약수 구하기

그렇다면 소인수분해로 최대공약수는 어떻게 구할 수 있을까요?

$$16 = 2^4$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

입니다.

두 자연수는 모두 2가 두 번 곱해져 있습니다.

16과 20을 2로 두 번 나눈다면, 두 수는 $2 \times 2, 5$ 로 서로소가 됩니다.

두 수의 소인수가 서로 다르다면 서로소이기 때문입니다.

중학교에서 최대공약수는 다음과 같은 방법으로 구할 수 있습니다.

◎ 소인수분해로 최대공약수 구하기

- ① 두 자연수를 소인수분해한다.
- ② 공통된 소인수를 찾는다.
- ③ 소인수의 지수 중 작은 수를 찾는다.
- ④ 거듭제곱을 하여 최대공약수를 구한다.

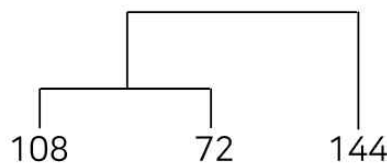
◎ 20과 50의 최대공약수를 구하시오.

- ① $20 = 2^2 \times 5$, $50 = 2 \times 5^2$
- ② 공통된 소인수를 찾는다. (2, 5)
- ③ 소인수 2의 지수는 각각 2와 1이고, 소인수 5의 지수는 각각 1과 2이다.
- ④ 지수의 최솟값을 거듭제곱으로 표현하면 $2 \times 5 = 10$

답 : 10

세 자연수의 최대공약수

(1) 토너먼트식



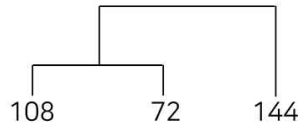
첫 번째 방법은 토너먼트식으로 최대공약수를 구하는 방법입니다.

체육대회에서 사용하는 대진표 방식으로

두 수에 대하여 최대공약수를 연속해서 구하는 방법입니다.

◎ 108, 72, 144의 최대공약수를 구해봅시다.

[풀이]

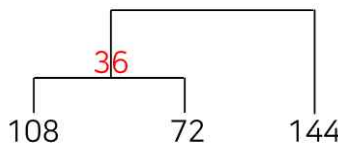


먼저 108과 72의 최대공약수를 구해봅시다.

108을 소인수분해하면 $108 = 2^2 \times 3^3$

72를 소인수분해하면 $72 = 2^3 \times 3^2$ 으로

108과 72의 최대공약수는 $2^2 \times 3^2 = 36$ 으로 36입니다.



다음으로 36과 144의 최대공약수를 구해봅시다.

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

으로 36과 144의 최대공약수는 36임을 알 수 있습니다.

따라서 세 자연수의 최대공약수는 36입니다.

(2) 소인수분해하여 비교하기

두 번째 방법은 세 자연수를 한꺼번에 소인수분해하여 비교하는 방법입니다.
공통된 소인수를 찾은 후, 가장 작은 지수를 찾습니다.

세 자연수 108, 72, 144에 대하여 소인수분해를 하면 다음과 같습니다.

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

세 자연수의 최대공약수는 소인수를 2와 3을 가지며 그 지수는 각각 2와 2를 가집니다.

따라서 세 자연수의 최대공약수가 $2^2 \times 3^2 = 36$ 임을 알 수 있습니다.

학습지제작소	중학교 1학년 수학 1. 소인수분해 개념정리 1-4. 최소공배수	중학교
		1학년 반
		이름

최소공배수

공배수란, 두 개 이상의 자연수의 공통인 배수이고,
최소공배수는 공배수 중 가장 작은 수를 말합니다.

예) 2와 3의 공배수: 6,12,18,24...

예) 2와 3의 최소공배수: 6

◎ 최소공배수의 성질

최소공배수는 모든 공배수의 약수이고,
모든 공배수는 최소공배수의 배수입니다.

예) 10과 12의 공배수는 60, 120, 180, 240, 300...으로, 최소공배수 60의 배수입니다.

예) 22와 55의 공배수는 110, 220, 330, 440, 550...으로, 최소공배수 110의 배수입니다.

소인수분해로 최소공배수 구하기

소인수분해를 이용해 최소공배수를 구해보시다.

10과 12의 최소공배수를 구해볼까요?

먼저 10과 12를 각각 소인수분해를 해봅시다.

$$10 = 2 \times 5$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

10과 12의 공배수는 10의 배수이면서 12의 배수인 수입니다.

다시 말해 10과 12의 공배수는

$$2 \times 5 \times \square$$

$$2 \times 2 \times 3 \times \square$$

를 모두 만족해야 합니다.

두 조건을 만족하기 위해서는 (2×2) 의 배수이면서 3의 배수이면서 5의 배수여야 합니다.

따라서 (2×2) , 3, 그리고 5의 곱의 배수일 필요가 있습니다.

$$2^2 \times 3 \times 5 \times \square$$

10과 12의 공배수는 $60 \times \square$ 꼴입니다.

그런데 $\square=1$ 일 때 가장 작으므로,
최소공배수는 60입니다.

자, 그럼 우리가 밟아온 과정을 정리해봅시다.

우선 10과 12를 소인수분해한 뒤
두 조건을 모두 만족하는 배수를 찾았습니다.
두 조건을 만족하려면 공통인 소인수는 더 큰 지수를 가진 것으로, 공통이 아닌 소인수는 모두
곱해야 합니다.

과정을 표현하면 아래 식과 같습니다.

$$10 = 2 \times 5$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

세 자연수의 최소공배수

(1) 토너먼트 식(두 자연수의 최소공배수 구하기)

세 자연수 24, 36, 20의 최소공배수를 구해봅시다.
24와 36의 최소공배수를 구해보면,

$$\begin{array}{r} 2) \ 24 \ 36 \\ 3) \ 12 \ 18 \\ 2) \ 4 \ 6 \\ \hline 2 \ 3 \end{array}$$

으로 노란색으로 나타낸 부분(L자)을 모두 곱하면 최소공배수를 얻을 수 있습니다.

$$\begin{array}{r} 2) \ 24 \ 36 \\ 3) \ 12 \ 18 \\ 2) \ 4 \ 6 \\ \hline 2 \ 3 \end{array}$$

$$2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 72 \text{로}$$

24와 36의 최소공배수는 72입니다.

◎ 72와 20의 최소공배수를 구해봅시다.

[풀이]

$$\begin{array}{r} 2) \ 72 \ 20 \\ 2) \ 36 \ 10 \\ \hline 18 \ 5 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 18 \times 5 = 360 \text{으로}$$

72와 20의 최소공배수는 360입니다.

따라서 세 자연수 24, 36, 20의 최소공배수는 360입니다.

(2) 소인수분해로 최소공배수 구하기

- ① 세 자연수를 소인수분해한다.
- ② 세 자연수의 소인수를 모두 쓴다.
- ③ ②에서 얻은 수를 밑으로 하고, 지수가 가장 큰 값을 지수로 한다.
- ④ 곱하여 최소공배수를 구한다.

24, 36, 20을 차례로 소인수분해를 하면 다음과 같습니다.

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

세 자연수의 소인수는 2, 3 | 2, 3 | 2, 5 입니다.

따라서 최소공배수의 소인수는 2, 3, 5입니다.

2의 지수 중 가장 큰 값은 3

3의 지수 중 가장 큰 값은 2

5의 지수 중 가장 큰 값은 1입니다.

따라서 세 자연수의 최소공배수는 $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$ 입니다.

학습지제작소	중학교 1학년 수학 1. 소인수분해 개념정리 1-5. 약수의 개수	중학교
		1학년 반
		이름

약수의 개수 구하기

자연수의 약수의 개수는 소인수분해를 이용해 구할 수 있습니다.

◎ 6의 약수의 개수를 구해봅시다.

[풀이]

$6 = 2 \times 3$ 입니다.

이때 소인수 2와 3의 거듭제곱은 서로 겹치지 않습니다.

6의 약수는 2를 소인수로 가지지 않거나 2의 1제곱을 가질 수 있습니다.
또한 3을 소인수로 가지지 않거나 3의 1제곱을 가질 수 있습니다.

이를 표로 나타내면 다음과 같습니다.

$\times$	1	2
1	1	2
3	3	6

표는 가로 2칸, 세로 2칸에 6의 약수가 적혀있습니다.
따라서 6의 약수의 개수는 4개입니다.

◎ 18의 약수의 개수를 구해봅시다.

[풀이]

18을 소인수분해하면 $18 = 2 \times 3^2$ 입니다.

이를 참고하여 약수를 표로 나타내면

$\times$	1	3
1	1	2
3	3	6
3^2	9	18

로, 표 속 약수 칸을 세면 6개입니다.

그렇다면 두 표의 공통점은 무엇일까요?

표의 가로 세로 방향 칸 수를 세어보면 지수보다 1만큼씩 큼을 알 수 있습니다.

왜냐하면, 소인수를 가지지 않을 때(1)를 포함하기 때문입니다.

이를 바탕으로 자연수의 약수의 개수를 구하는 법을 정리해봅시다.

- ① 자연수를 소인수분해한다.
- ② 소인수의 지수를 구한다.
- ③ 각 지수에 1을 더한다.
- ④ ③을 모두 곱한다.

예) 100의 약수는

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

$$(2+1) \times (2+1) = 3 \times 3 = 9$$

9개